Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:

Finn Knudsen	73 59 35 23	916 34 712
Brynjulf Owren	73 59 35 18	930 21 641
Eldar Straume	73 59 66 83	994 10 389

EKSAMEN I TMA4105 MATEMATIKK 2

Bokmål
Fredag 20. august 2010
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S, Citizen SR270X)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensur 10. september 2010.

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 La $f(x, y) = 4xy - 2x^2 - y^4$.

a) Finn alle de kritiske punktene i xy-planet.

b) Avgjør hvilke av de kritiske punktene er lokale maksimums-, minimums- eller sadelpunkter.

Oppgave 2 Bruk metoden med en Lagrangemultiplikator til å finne avstanden mellom den plane kurven gitt ved likningen $xy^2 = 8$ og origo. Hint: Minimer funksjonen $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Oppgave 3 Et dobbeltintegral blir ved iterert integrasjon

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{y(1+x^2)}} = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{\sqrt{y(1+x^2)}}\, dx \right) dy$$

a) Skisser området D, og beregn integralet I ved å bytte om integrasjonsrekkefølgen.

b) Regn ut integralet I ved å benytte variabelskiftet $(u, v) \mapsto (u, u^2 v) = (x, y)$. Vis først at området D i xy-planet tilsvarer området R i uv-planet bestemt av ulikhetene $0 \le u \le 1$ og $0 \le v \le 1$. Det oppgis at

$$dxdy = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right\| dudv$$

Oppgave 4 Gitt vektorfeltet

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = x\cos(y^2)\,\boldsymbol{i} + (z - x^2\, y\, \sin(y^2))\,\boldsymbol{j} + y\,\boldsymbol{k}$$

a) Finn curl $\boldsymbol{F}$

b) Bestem

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\, ds$$

der C er kurven med parametrisering

$$\boldsymbol{r}(t) = \sin t\,\boldsymbol{i} + \sin 2t\,\boldsymbol{j} + t(\pi - 2t)\,\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Oppgave 5 Et romlig legeme T er begrenset av flatene

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1, \qquad z = 0 \qquad \text{og} \qquad z = \sqrt{3}$$

a) Beskriv flaten $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ i sylinderkoordinater, og tegn snittet mellom legemet T og halvplanet gitt ved $\theta = \theta_0$, en konstant vinkel. Merk at dette halvplanet har koordinater r, z med $r \ge 0$.

b) Finn volumet av T ved å beregne et trippelintegral i sylinderkoordinater av formen

$$\iiint_T dV$$

i rekkefølgen dr, $d\theta$, dz.

c) La $\boldsymbol{F}$ være vektorfeltet

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

Finn verdien av

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$$

der S er den krumme delen av overflaten til T, og $\boldsymbol{n}$ er enhetsnormalen til S som peker ut av T.