**Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**



Faglig kontakt under eksamen:
Harald Kittang tlf. 73 59 16 93
Lisa Lorentzen tlf. 73 59 35 48
Sigmund Selberg tlf. 73 55 02 84

# EKSAMEN I TMA4105 MATEMATIKK 2

Bokmål
Onsdag 19. mai 2004
kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Typegodkjent kalkulator med tomt minne (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 14. juni 2004

*Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.*

**Oppgave 1** La $f(x, y, z) = xy^2 + \arctan(xz)$. La $P_0$ være punktet $(1, 1, -1)$.

**a)** Finn gradienten til $f$ i $P_0$.

**b)** La $S$ være den av nivåflatene til $f$ som går gjennom punktet $P_0$. Finn en ligning for $S$ og en ligning for tangentplanet til $S$ i $P_0$.

**Oppgave 2** Finn og klassifiser de kritiske punktene til funksjonen

$$f(x, y) = xe^{-(x^2+y^2)/2}.$$

Har $f$ absolutte (dvs. globale) maksimums- og minimumsverdier? (Husk å begrunne svaret.)

**Oppgave 3** La $S$ være flaten bestemt ved

$$z = 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}, \qquad z \geq 0.$$

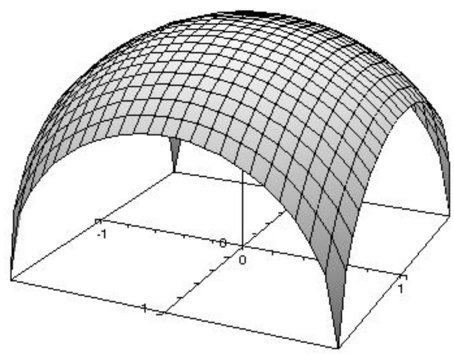
Skisser $S$, og beregn fluksen opp gjennom $S$ av vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2)\mathbf{i} + (3x^2y + y^3 - x^3)\mathbf{j} + (z + 1)\mathbf{k}.$$

**Oppgave 4** La $S$ være kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

**a)** La $A$ betegne arealet av den delen av $S$ som ligger over planet $z = 1$. Uttrykk $A$ som et iterert dobbeltintegral, og vis ved å løse dette integralet at $A = \left(4 - 2\sqrt{2}\right)\pi$.

**b)** Bestem arealet av den delen av $S$ som ligger over kvadratet $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ (se figur). (*Hint:* Dersom du benytter svaret fra punkt (a), kan oppgaven løses uten integrasjon. Dersom du velger å løse oppgaven ved integrasjon, kan du få bruk for at $\int_0^1 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\right)\,dx = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi$.)




**Oppgave 5** Betrakt vektorfeltene

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (1+x)e^{x+y}\mathbf{i} + xe^{x+y}\mathbf{j} - 2z\mathbf{k},$$
$$\mathbf{G}(x,y,z) = (1+x)e^{x+y}\mathbf{i} + xe^{x+y}\mathbf{j} - 2y\mathbf{k} = \mathbf{F}(x,y,z) + 2(z-y)\mathbf{k}.$$

**a)** Bestem en funksjon $f(x,y,z)$ slik at $\nabla f = \mathbf{F}$.

**b)** Beregn $\int_C \mathbf{G}\cdot\mathbf{T}\,ds$ langs den orienterte kurven $C$ gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)e^t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k} \quad \text{for} \quad 0 \le t \le 1.$$

**Oppgave 6** En orientert kurve $C$ er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + (1+\sin t)\mathbf{j} + (1 - \cos t - \sin t)\mathbf{k} \quad \text{for} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

**a)** Vis at $C$ ligger i et plan, og finn en ligning for dette planet. Hva slags kurve er projeksjonen av $C$ i $xy$-planet?

**b)** Bruk Stokes' teorem til å regne ut $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$, der

$$\mathbf{F}(x,y,z) = ye^x\mathbf{i} + (x^2 + e^x)\mathbf{j} + z^2e^z\mathbf{k}.$$

# FORMELLISTE

**Dekomponering av akselerasjonsvektor:**

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\,\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v^2(t)\,\mathbf{N}(t)$$

**Diskriminanten i annenderiverttesten:**

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx},\ \ B = f_{xy},\ \ C = f_{yy}$$

**Koordinatsystemer:**

Sylinderkoordinater $(r,\,\theta,\,z)$:

$$x = r\,\cos\theta, \quad y = r\,\sin\theta, \quad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

Kulekoordinater $(\rho,\,\varphi,\,\theta)$:

$$x = \rho\,\sin\varphi\,\cos\theta, \quad y = \rho\,\sin\varphi\,\sin\theta, \quad z = \rho\,\cos\varphi,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dV = \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

**Flateintegral:**

$$dS = |\mathbf{N}(u,v)|du\,dv = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv$$

Spesialtilfelle 1: $dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy$

**Tyngdepunkt for romlige legemer:**

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,dm, \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,dm, \quad \overline{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,dm$$

**Vektoranalyse:**

Greens teorem: $\displaystyle\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$

Stokes' teorem: $\displaystyle\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$