Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4105 Matematikk 2
vår 2009

Løsningsforslag til eksamen
15. august 2009

1 Treghetsmoment med hensyn på x-aksen er gitt ved

$$I_x = \int_{x=0}^{1}\int_{y=-x}^{2x} y^2\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=-x}^{2x} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (8x^3 + x^3)dx = 3\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4}.$$

2 La $F(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{1^2} - \dfrac{z^2}{3^2}$.
Da er hyperboloiden en nivåflate for F. Derfor er

$$\nabla F(x,y,z) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right\rangle = \left\langle \frac{x}{2}, 2y, -\frac{2z}{9}\right\rangle$$

en normalvektor til hyperboloiden i punktet (x,y,z).
For $(x,y,z) = (2,1,3)$ er $\nabla F(2,1,3) = \langle 1, 2, -\frac{2}{3}\rangle$. Tangentplanet til hyperboloiden i $(2,1,3)$ er derfor gitt ved

$$\left\langle 1, 2, -\frac{2}{3}\right\rangle \cdot \left\langle x-2, y-1, z-3\right\rangle = 0$$
$$x - 2 + 2(y-1) - \frac{2}{3}(z-3) = 0$$
$$x + 2y - \frac{2z}{3} = 2$$

3 **a)** Ved Newtons andre lov gjelder det at

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\mathbf{r}''(t) \quad \text{der } \mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, 2t\rangle$$

langs kurven C. Vi har $\mathbf{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t, 2\rangle$ og $\mathbf{r}''(t) = \langle -\cos t, -\sin t, 0\rangle = \langle -x, -y, 0\rangle$.
Det følger derfor at $\mathbf{F} = \mathbf{G}$ langs C.
Starthastighet $\mathbf{v}(0) = \mathbf{r}'(0) = \langle -\sin 0, \cos 0, 2\rangle = \langle 0, 1, 2\rangle$.

b) Av a) ser vi at farten $v(t) = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 2^2} = \sqrt{5}$ er konstant under hele bevegelsen. Kraftfeltet $\mathbf{G}$ gir derfor bare retningsendring. Det vil si, komponenten av $\mathbf{G}$ som gir fartsendring er lik $\mathbf{0}$ og komponenten som gir retningsendring er $\mathbf{G}$.

Alternativ løsning:
Komponenten av $\mathbf{G}$ som gir fartsendring er gitt ved $\mathbf{G}\cdot\mathbf{T}$ (eller $(\mathbf{G}\cdot\mathbf{T})\mathbf{T}$) der $\mathbf{T} = \mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$). Siden $\mathbf{r}'(t) \perp \mathbf{r}(t)$ for denne bevegelsen, er $\mathbf{G}\cdot\mathbf{T} = 0$.
Komponenten av $\mathbf{G}$ som gir retningsendring er derfor $\mathbf{G} - \mathbf{0} = \mathbf{G}$.

c) Siden $\mathbf{G} \perp \mathbf{r}$ i hvert punkt på C, er arbeidet lik null.

Alternativ løsning:
Arbeidet er gitt ved

$$\int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{4\pi} m\langle -\cos t, -\sin t, 0\rangle \cdot \langle -\sin t, \cos t, 2\rangle \, dt = \int_0^{4\pi} 0 \, dt = 0.$$

$\boxed{4}$ S er en rotasjonsflate om z-aksen som ligger mellom de to planene $z = 0$ og $z = 2$. Projeksjonen av S ned i xy-planet er en kvart sirkelring R gitt ved $1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2$ for $x \geq 0$ og $y \geq 0$. Videre er

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \ln(x^2 + y^2)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln(x^2 + y^2)}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy \\ &= \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{4y^2}{(x^2 + y^2)^2}} \, dx \, dy, \end{aligned}$$

slik at arealet av S er gitt ved

$$A = \iint_S d\sigma = \iint_R \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{4y^2}{(x^2 + y^2)^2}} \, dx \, dy.$$

Vi gjør om til sylinderkoordinater:

$$A = \int_{r=1}^{e} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{4r^2}{r^4}} \, r \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{2} \int_1^e \sqrt{r^2 + 4} \, dr.$$

Ifølge Rottmann, formel (54) side 138, gjelder

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln C(x + \sqrt{x^2 + a^2}).$$

Derved er

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{r}{2}\sqrt{4 + r^2} + \frac{4}{2} \ln\left(r + \sqrt{4 + r^2}\right)\right]_1^e \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{e}{2}\sqrt{4 + e^2} + 2\ln(e + \sqrt{4 + e^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{5} - 2\ln(1 + \sqrt{5})\right). \end{aligned}$$

Alternativ løsning:
Projeksjonen R av S er gitt ved $1 \leq r \leq e$ for $0 \leq \theta \leq \pi/2$ i sylinderkoodinater. En parametrisering av S er

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = \ln(r^2) = 2\ln r \quad \text{for } (r, \theta) \in R.$$

Vi setter $\mathbf{r}(r, \theta) = \langle r\cos\theta, r\sin\theta, 2\ln r\rangle$. Da er $d\sigma = |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| dr \, d\theta$, der

$$\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & \frac{2}{r} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = -2\cos\theta \, \mathbf{i} - 2\sin\theta \, j + r\mathbf{k}$$

og derved

$$d\sigma = |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| dr\, d\theta = \sqrt{4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta + r^2}\, dr\, d\theta = \sqrt{4 + r^2}\, dr\, d\theta.$$

Beregningen av A går så videre som over.

$\boxed{5}$ **a)** Divergensen til $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) \\
&= \frac{\partial(e^{y\sin z})}{\partial x} + \frac{\partial(y^2/2 + e^{x\sin z})}{\partial y} + \frac{\partial(z^2 - yz)}{\partial z} \\
&= 0 + y + 2z - y = 2z.
\end{aligned}$$

For å kunne bruke divergensteoremet, må vi lukke flaten. Det gjør vi ved å sette på et lokk

$$L: \qquad z = 3 \quad \text{for } x^2 + y^2 \le 1$$

og en bunn

$$B: \qquad z = 0 \quad \text{for } x^2 + y^2 \le 4.$$

De tre flatene S, B og L danner tilsammen en stykkvis glatt, lukket flate som avgrenser et romlig område D. Ved divergensteoremet er derfor

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \iint_B \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) d\sigma + \iint_L \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV.$$

På B og L er $d\sigma = dA$, slik at fluksen ut gjennom B og L tilsammen er

$$\begin{aligned}
&\iint_B \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) d\sigma + \iint_L \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} d\sigma \\
&= -\int_{r=0}^{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} (0^2 - 0r\sin\theta) r\, d\theta\, dr + \int_{r=0}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} (3^2 - 3r\sin\theta) r\, d\theta\, dr \\
&= 0 + \int_0^1 2\pi \cdot 9r\, dr = 9\pi.
\end{aligned}$$

Fluksen ut gjennom S er derfor

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV - \iint_B \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) d\sigma - \iint_L \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} d\sigma \\
&= \iiint_D 2z\, dV - 9\pi \\
&= \int_{r=0}^{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{4-r^2} 2zr\, dz\, d\theta\, dr - \int_{r=0}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=3}^{4-r^2} 2zr\, dz\, d\theta\, dr - 9\pi \\
&= \int_{r=0}^{2} 2\pi r \Big[z^2\Big]_{z=0}^{4-r^2} dr - \int_{r=0}^{1} 2\pi r \Big[z^2\Big]_{z=3}^{4-r^2} dr - 9\pi \\
&= 2\pi \int_{r=0}^{2} (4 - r^2)^2 r\, dr - 2\pi \int_{r=0}^{1} ((4 - r^2)^2 - 9) r\, dr - 9\pi \\
&= 2\pi \int_{u=4}^{0} u^2 \cdot \frac{-du}{2} - 2\pi \int_{u=4}^{3} (u^2 - 9) \cdot \frac{-du}{2} - 9\pi \\
&= \pi \int_{u=0}^{4} u^2\, du - \pi \int_{u=3}^{4} (u^2 - 9) du - 9\pi \\
&= \pi \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^4 - \pi \left[\frac{u^3}{3} - 9u\right]_3^4 - 9\pi = \pi \left(\frac{64}{3} - \frac{64}{3} + 9 + 9 - 9\right) = 9\pi.
\end{aligned}$$

b) S er en flate der randen består av de to sirklene

$$C_1: \qquad x = 2\cos\theta, \quad y = 2\sin\theta, \quad z = 0 \quad \text{for } 0 \le \theta \le 2\pi,$$

og

$$C_2: \qquad x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta, \quad z = 3 \quad \text{for } 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Vi kan bruke Stokes theorem til å beregne integralet i oppgaven. Men siden **n** peker vekk fra z-aksen, er orienteringen til C_2 gitt ved vår parametrisering, i gal retning. Derfor er

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma &= \int_{C_1}\mathbf{G}\cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2}\mathbf{G}\cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi}\langle 2\cos\theta,\, 2\sin\theta,\, \sqrt{0+1}\cdot 2\cos\theta\rangle\cdot\langle -2\sin\theta,\, 2\cos\theta,\, 0\rangle\,dt \\
&- \int_{\theta=0}^{2\pi}\langle \cos\theta,\, \sin\theta,\, \sqrt{9+1}\cdot\cos\theta\rangle\cdot\langle -\sin\theta,\, \cos\theta,\, 0\rangle\,dt \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} 0\,dt - \int_{\theta=0}^{2\pi} 0\,dt = 0.
\end{aligned}$$

Alternativ løsning: For dette feltet gjelder det at

$$\operatorname{curl}\mathbf{G}(x,y,z) = \nabla\times\mathbf{G}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & x\sqrt{z^2+1} \end{vmatrix} = 0\,\mathbf{i} - \sqrt{z^2+1}\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}.$$

Projeksjonen av S ned i xy-planet er ringområdet R gitt ved

$$R: \qquad 1 \le x^2+y^2 \le 4.$$

Flaten S kan beskrives ved parametriseringen

$$S: \qquad x = x, \quad y = y, \quad z = f(x,y) = 4 - x^2 - y^2 \quad \text{for } (x,y)\in R.$$

Derved er

$$\operatorname{curl}\mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \langle 0, -\sqrt{z^2+1},\, 0\rangle\cdot\langle -f_x, -f_y, 1\rangle\,dx\,dy = -\sqrt{z^2+1}\cdot 2y\,dA$$

og

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = -\iint_R 2y\sqrt{(4-x^2-y^2)^2+1}\,dA.$$

Vi gjør om integralet til polarkoordinater:

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = -2\int_{r=1}^{2}\int_{\theta=0}^{2\pi} r\sin\theta\cdot\sqrt{(4-r^2)^2+1}\cdot r\,d\theta\,dr = \int_1^2 0\,dr = 0.$$

Alternativ løsning: Vi finner $\operatorname{curl}\mathbf{G}$ som i alternativet over, men parametriserer flaten S ved

$$S: \qquad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = 4 - r^2 \quad \text{for } 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Skriver vi $\mathbf{r}(r,\theta) = \langle r\cos\theta,\, r\sin\theta,\, 4-r^2\rangle$, får vi $d\sigma = |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta|\,dr\,d\theta$, der

$$\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & -2r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = 2r^2\cos\theta\,\mathbf{i} + 2r^2\sin\theta\,j + r\mathbf{k}$$

og derved

$$d\sigma = |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta|\,dr\,d\theta = \sqrt{4r^4\cos^2\theta + 4r^4\sin^2\theta + r^2}\,dr\,d\theta = \sqrt{4r^2+1}\cdot r\,dr\,d\theta.$$

Beregningen av A går så videre som over.

$\boxed{6}$

$$f(1,\,\ln 2,\,8) = 1\cdot 8\cdot e^{2\ln 2} = 8\cdot 2^2 = 32.$$

Anslag for maksimal feil:

$$\begin{aligned} |\Delta F| &\approx \frac{\partial f}{\partial x}(1,\ln 2,8)\cdot|\Delta x| + \frac{\partial f}{\partial y}(1,\ln 2,8)\cdot|\Delta y| + \frac{\partial f}{\partial z}(1,\ln 2,8)\cdot|\Delta z| \\ &\le (ze^{2y})\Big|_{(1,\ln 2,8)}\cdot 0.1 + (2xze^{2y})\Big|_{(1,\ln 2,8)}\cdot 0.1 + (xe^{2y})\Big|_{(1,\ln 2,8)}\cdot 0.1 \\ &= 8\cdot 2^2\cdot 0.1 + 2\cdot 8\cdot 2^2\cdot 0.1 + 1\cdot 2^2\cdot 0.1 = 10. \end{aligned}$$