Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Ferenc Ágoston Bartha telefon 73 55 02 57 / 73 59 35 20
Lisa Lorentzen telefon 73 59 35 48 / 73 59 35 20

Eksamen i TMA4105 Matematikk 2

Bokmål
Onsdag 22. mai 2013
Tid: 09.00 – 13.00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensur: 12. juni 2013.

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Finn tangentplanet M til ellipsoiden $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{8} = 1$ i punktet $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$.

Oppgave 2 La C være kurven gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \sqrt{t}\left(\frac{2}{3}t - 1\right)\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \qquad 1 \le t \le 4.$$

Bestem buelengden til C.

Oppgave 3

a) La

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x - y}, \qquad x \neq y.$$

Vis at grensen $\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x, y)$ eksisterer for alle $a \in \mathbb{R}$.

b) Ved å la

$$f(a, a) = \lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x, y),$$

så definerer f en kontinuerlig deriverbar funksjon på hele xy-planet. Regn ut den retningsderiverte $D_{\mathbf{v}} f(0, 0)$ for en vilkårlig enhetsvektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $|\mathbf{v}| = 1$.

Oppgave 4 Finn minste avstand fra origo til planet $2x+2y+z=4$.

(Hint: Lagranges multiplikatormetode kan benyttes med $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.)

Oppgave 5 Finn arealet av den del av planet

$$z=2x+2y$$

der $x^2 \le y$ og $y^2 \le x$.

Oppgave 6

a) Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}$ gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}\,\mathbf{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{j} \qquad \text{for} \qquad (x,y)\neq(0,0),$$

er curlfritt (det vil si, $\operatorname{curl}\mathbf{F}(x,y)\cdot\mathbf{k}=0$ for alle $(x,y)\neq(0,0)$).

b) La C betegne kurven i xy-planet som starter i $(1,0)$ og gjennomløper sirkelen $x^2+y^2=1$ nøyaktig én gang, der C er orientert mot klokken. Regn ut

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s,$$

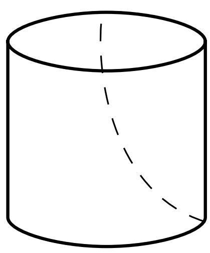
og avgjør hvorvidt $\mathbf{F}$ er konservativt. Begrunn svaret.

Oppgave 7 La S være sylinderen

$$x^2+y^2=1, \qquad z\ge 0,$$

og la $P_1=(1,0,0)$ og $P_2=(0,1,h)$ være to forskjellige punkter på S.

Uttrykk P_1 og P_2 i sylinderkoordinater (r,θ,z), og bestem lengden til den korteste kurven på S som forbinder P_1 og P_2. (Kurven kan antas å være parametrisert av θ.)



En kurve som forbinder to punkter på en sylinder.

Formelliste følger vedlagt på neste side.

Formelliste

Dekomponering av akselerasjonsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v^2(t)\mathbf{N}(t)$$

Annenderiverttesten er basert på:

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

Koordinatsystemer:

Sylinderkoordinater (r, θ, z):

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$
$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

Kulekoordinater (ρ, φ, θ):

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\varphi$$
$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \mathrm{d}V = \rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

Flateintegral:

$$\mathrm{d}\sigma = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Tyngdepunkt og treghetsmoment for romlige legemer:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,\mathrm{d}m, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,\mathrm{d}m, \quad \bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,\mathrm{d}m, \quad \mathrm{d}m = \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

$$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}m, \quad I_y = \iiint_T (x^2 + z^2)\,\mathrm{d}m, \quad I_z = \iiint_T (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m,$$

$$I_L = \iiint_T R(x,y,z)^2\,\mathrm{d}m$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle\oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}A$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V$

Stokes' teorem: $\displaystyle\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma$