Eksamen i TMA4105 Matematikk 2
22. mai 2013

Løsningsforslag

1 La $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + \frac{1}{8}z^2 - 1$, slik at

$$F(x,y,z) = 0$$

beskriver ellipsoiden implisitt. Tangentplanet i $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$ står normalt på gradienten til F,

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0) = 2x_0\,\mathbf{i} + 2y_0\,\mathbf{j} + \frac{z_0}{4}\,\mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{1}{2}\,\mathbf{k}$$

i samme punkt. Altså er tangentplanet M gitt ved $\nabla F(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$, det vil si,

$$M: \qquad \left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(z-2) = 0,$$

som forenkler seg til $2x + 2y + z = 4$.

2 Ettersom $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + (t^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}})\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, får vi at

$$\int_1^4 |\mathbf{v}(t)|\,\mathrm{d}t = \int_1^4 \sqrt{\frac{(1+2t)^2}{4t}}\,\mathrm{d}t.$$

Substitusjonen $u = \sqrt{t}$ gir $\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ med nye integrasjonsgrenser $u = 1$ og $u = 2$. Dermed er

$$\int_1^4 |\mathbf{v}(t)|\,\mathrm{d}t = \int_1^2 (1+2u^2)\,\mathrm{d}u = \frac{17}{3}.$$

3 **a)** Da

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x-y} = x + y \to 2a \quad \text{der} \quad x, y \to a,$$

holder for alle $x \neq y$, så eksisterer $\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y) = 2a$ for alle $a \in \mathbb{R}$.

b) La $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ der $|\mathbf{v}| = 1$. Da funksjonen f gitt ved $f(x,y) = x + y$ er kontinuerlig deriverbar overalt, har vi at $D_{\mathbf{v}}f = \nabla f \cdot \mathbf{v}$, slik at

$$D_{\mathbf{v}}f(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot\mathbf{v} = (\mathbf{i}+\mathbf{j})\cdot(v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j}) = v_1 + v_2.$$

Legg merke til at $\nabla f(x,y) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ for alle punkter (x,y), og dermed også i $(x,y) = (0,0)$.

4 La

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{og} \qquad g(x,y,z) = 2x + 2y + z - 4.$$

Ved Lagranges multiplikatormetode, så er de nødvendige og tilstrekkelige betingelsene for minste verdi av f under bibetingelsen $g(x,y,z) = 0$ gitt ved $\nabla f = \lambda \nabla g$, for λ et reelt tall. I vårt tilfelle er

$$\nabla f(x,y,z) = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k} \qquad \text{og} \qquad \nabla g(x,y,z) = 2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

slik at

$$2x = 2\lambda, \quad 2y = 2\lambda, \quad \text{og} \quad 2z = \lambda,$$

er de nødvendige betingelsene for x, y, z og λ. Den eneste løsningen til dette systemet er

$$(x,y,z) = \lambda\left(1, 1, \tfrac{1}{2}\right),$$

som innsatt i $g(x,y,z) = 0$ gir at

$$2\lambda + 2\lambda + \frac{\lambda}{2} = 4 \quad \text{det vil si} \quad \lambda = \frac{8}{9}.$$

Ettersom vi har funnet kun én løsning (x,y,z), og ethvert plan har en minste avstand til origo, har vi funnet den minste avstanden fra origo til planet $2x + 2y + z = 4$. Den minste avstanden er så

$$\sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2} = \frac{4}{3}.$$

5 La S være den delen av planet $z = f(x,y) = 2x+2y$ der $x^2 \le y$ og $y^2 \le x$. Fra $x^2 \le y$, $y^2 \le x$ og $z = f(x,y)$ får vi at flaten S kan parametriseres ved $\mathbf{r}\colon D \to \mathbb{R}^3$, der

$$\mathbf{r}(x,y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x,y)\,\mathbf{k},$$

og $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \le x \le \sqrt{y}, 0 \le y \le 1\}$. Flatedifferentialet $\mathrm{d}\sigma$ til S er gitt ved

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Arealet av S er så

$$A = \iint_S \mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} 3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 3(\sqrt{y} - y^2)\,\mathrm{d}y = 1.$$

6 **a)** I vårt tilfelle er **k**-komponenten til curl **F** gitt ved

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}(x,y)\cdot\mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-x\cdot(2x)+x^2+y^2-y\cdot(2y)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

for alle $(x,y) \ne (0,0)$.

b) Enhetssirkelen C kan parameteriseres ved

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t) \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

slik at $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$, og $|\mathbf{r}'(t)| = 1$. Dermed er

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left(\frac{-\sin t}{\sin^2 t+\cos^2 t}, \frac{\cos t}{\sin^2 t+\cos^2 t}\right)\cdot(-\sin t, \cos t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi.$$

Dermed kan ikke **F** være konservativt. For hvis **F** hadde vært konservativt, så ville sirkulasjonsintegralet langs enhver enkel, lukket kurve være lik null, da **F** ville vært et gradientfelt, det vil si $\mathbf{F} = \nabla f$ for en potensialfunksjon f.

(Merk at **F** *er* konservativt på ethvert enkeltsammenhengende område som ikke inneholder origo. Men da definisjonsmengden oppgitt i oppgaven ikke er enkeltsammenhengende, så gjelder ikke teoremet som sier at et curlfritt vektorfelt har en potensialfunksjon.)

7 Sylinderen har radius $r = 1$, og kan derfor parametriseres ved (θ, z) der

$$S\colon \qquad (\cos\theta, \sin\theta, z), \qquad 0 \le \theta < 2\pi,\ z \ge 0.$$

I disse koordinatene så korresponderer P_1 til $(r,\theta,z) = (1,0,0)$, og P_2 til $(r,\theta,z) = (1,\pi/2,h)$. For

$$C\colon \quad \mathbf{r}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, f(\theta)), \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad f(0) = 0, \quad f(\pi/2) = h,$$

en kurve på S fra P_1 til P_2, så er avstanden mellom P_1 og P_2 gitt ved

$$L(C) = \int_0^{\pi/2}\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\theta}\right|\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta,$$

der $f(0) = 0$ og $f(\pi/2) = h$.

Dermed sammenfaller $L(C)$ med lengden til grafen til f på intervallet $0 \le \theta \le \pi/2$, som igjen betyr at den optimale $f(\theta)$ beskriver den korteste veien mellom $(0,0)$ og $(\pi/2, h)$ i (θ, z)-planet. Løsningen på dette problemet er å ta den rette linjen mellom $(0,0)$ og $(\pi/2,h)$ gitt ved

$$f(\theta) = \frac{2h}{\pi}\theta, \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Lengden til den korteste veien er så

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 + \left(\frac{2h}{\pi}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{2h}{\pi}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + h^2},$$

som, i den flate formuleringen av problemet, kan sjekkes direkte ved å benytte Pytagoras' teorem.