Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Marius Thaule   telefon 73 59 35 30 / 73 59 35 20
Lisa Lorentzen   telefon 73 59 35 48 / 73 59 35 20

Eksamen i TMA4105 Matematikk 2

Bokmål
Tirsdag 6. august 2013
Tid: 09.00 – 13.00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensur: 27. august 2013.

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 La C være den lukkede kurven i xy-planet bestående av den rette linjen fra $(0,0)$ til $(\pi/2,0)$, den delen av grafen til $y = \cos x$ som ligger mellom $(\pi/2,0)$ og $(0,1)$, og den rette linjen fra $(0,1)$ til $(0,0)$. La C være orientert mot klokken.

La vektorfeltet $\mathbf{F}$ være gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y) = (y^2 + x^5 e^{-y^6})\,\mathbf{i} + (x + y - x^6 y^5 e^{-y^6})\,\mathbf{j}.$$

Regn ut linjeintegralet

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s.$$

Oppgave 2

a) Vis at de to vektorvaluerte funksjonene $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$, gitt ved

$$\mathbf{r}_1(\alpha) = 2\cos\alpha\,\mathbf{i} + 2\sin\alpha\,\mathbf{j}, \qquad 0 \le \alpha \le \pi$$
$$\mathbf{r}_2(t) = -t\,\mathbf{i} + \sqrt{4-t^2}\,\mathbf{j}, \qquad -2 \le t \le 2,$$

beskriver samme kurve.

b) Bestem krumningen κ til kurven.

Oppgave 3 Gitt dobbeltintegralet

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

der f er en kontinuerlig funksjon, skissér integrasjonsområdet R, og uttrykk integralet som et iterert integral der integrasjonsrekkefølgen er byttet om.

Oppgave 4 La f være funksjonen gitt ved

$$f(x,y) = x^2y + \frac{1}{3}y^3 - x^2 - 2y.$$

a) Finn de kritiske punktene til f og bestem typen til disse.

b) Finn den minste verdien til f på sirkelen $x^2 + y^2 = 6$.
Hva blir den minste verdien til f i området $x^2 + y^2 \leq 6$?

Oppgave 5 La T være legemet i 1. oktant ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) beskrevet ved ulikheten

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2,$$

der massetettheten δ er gitt ved

$$\delta(x,y,z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

for en fiksert konstant k. Bestem massesenteret (lik tyngdepunktet) til T.

Oppgave 6 La vektorfeltet $\mathbf{F}$ være gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = 2xz\,\mathbf{i} + f(x,y)\,\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k},$$

der f er en to ganger kontinuerlig deriverbar, ukjent funksjon.

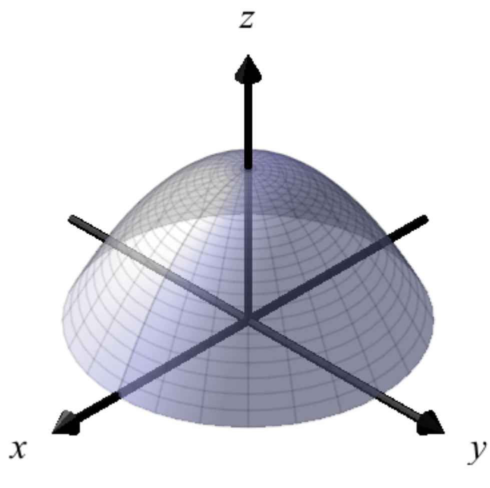
a) For hvilke(n) f er vektorfeltet $\mathbf{F}$ konservativt?

b) La S_1 være flaten gitt ved

$$z = 1 - x^2 - y^2, \qquad z \geq 0,$$

og la S_2 være flaten gitt ved

$$x^2 + y^2 \leq 1, \qquad z = 0.$$



La $\mathbf{n}_1$ og $\mathbf{n}_2$ være enhetsnormalvektorene til henholdsvis S_1 og S_2, begge med positiv $\mathbf{k}$-komponent. La f være funksjonen gitt ved $f(x,y) = 2x + y$.

Vis at

$$0 \leq \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1 \leq \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2$$

(i betydningen at det finnes en konstant $c > 0$ slik at $\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1 \leq c$ på S_1 og $\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2 \geq c$ på S_2).

Vis at

$$\iint_{S_1} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{S_2} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2\,\mathrm{d}\sigma.$$

Formelliste følger vedlagt på neste side.

Formelliste

Dekomponering av akselerasjonsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v^2(t)\mathbf{N}(t)$$

Annenderiverttesten er basert på:

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

Koordinatsystemer:

Sylinderkoordinater (r, θ, z):

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$
$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

Kulekoordinater (ρ, φ, θ):

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\varphi$$
$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \mathrm{d}V = \rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

Flateintegral:

$$\mathrm{d}\sigma = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Tyngdepunkt og treghetsmoment for romlige legemer:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,\mathrm{d}m, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,\mathrm{d}m, \quad \bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,\mathrm{d}m, \quad \mathrm{d}m = \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

$$I_x = \iiint_T (y^2+z^2)\,\mathrm{d}m, \quad I_y = \iiint_T (x^2+z^2)\,\mathrm{d}m, \quad I_z = \iiint_T (x^2+y^2)\,\mathrm{d}m,$$

$$I_L = \iiint_T R(x,y,z)^2\,\mathrm{d}m$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle\oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}A$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V$

Stokes' teorem: $\displaystyle\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma$