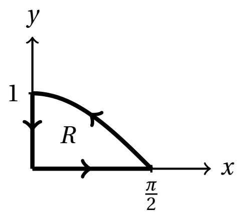
NTNU
Institutt for matematiske fag

Eksamen i TMA4105 Matematikk 2
6. august 2013

Løsningsforslag

1 La R betegne området C omslutter, det vil si

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le y \le \cos x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \right\}.$$



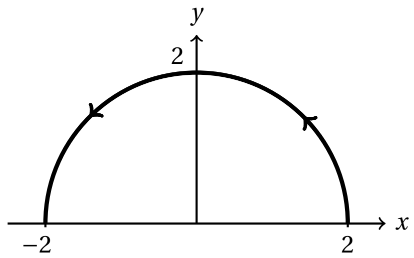
Ved Greens teorem (Stokes' teorem i planet) så er

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, \mathrm{d}s = \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}(x + y - x^6 y^5 e^{-y^6}) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + x^5 e^{-y^6}) \right) \mathrm{d}A = \iint_R (1 - 2y) \, \mathrm{d}A$$
$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} (1 - 2y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (\cos x - \cos^2 x) \, \mathrm{d}x = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

2 **a)** Vi observerer at

$$|\mathbf{r}_1(\alpha)| = |\mathbf{r}_2(t)| = 2.$$

Begge funksjonene angir en kurve som starter i $(2, 0)$ og slutter i $(-2, 0)$, der kurven er orientert fra høyre mot venstre. Begge har $\mathbf{j}$-komponent som er større eller lik 0 overalt på kurven. Altså beskriver begge parametriseringene øvre halvdel av sirkelen med radius 2 og sentrum $(0, 0)$, der sirkelbuen er orientert fra høyre mot venstre.



b) Krumningen for en sirkel med radius r er konstant lik $1/r$, slik at krumningen i vårt tilfelle er konstant lik $1/2$,

$$\kappa = \frac{1}{2}.$$

3 Fra $0 \le y \le 1$, $0 \le x \le 1 - \sqrt{1 - y^2}$, ser vi at (x, y) ligger innenfor enhetskvadratet $[0, 1] \times [0, 1]$, og at

$$S_1: \quad x = 0, 0 \le y \le 1 \quad \text{and} \quad S_2: \quad y = 1, 0 \le x \le 1,$$

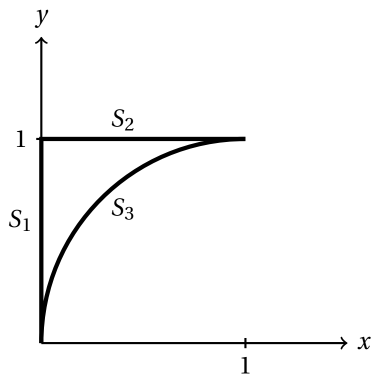
er to sider av R. Den tredje siden er grafen til funksjonen $y \mapsto x(y)$, det vil si

$$S_3: \quad x = 1 - \sqrt{1 - y^2}, \qquad 0 \le y \le 1.$$

Da $0 \le x, y \le 1$, er dette ekvivalent med

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1,$$

som angir enhetssirkelen med sentrum i $(1, 0)$. Ved å løse ut for y får vi,



$$S_3: \quad y = \sqrt{1 - (x - 1)^2}, \qquad 0 \le x \le 1,$$

slik at

$$\int_0^1 \int_0^{1 - \sqrt{1 - y^2}} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{\sqrt{1 - (x-1)^2}}^1 f(x, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

4 **a)** Vi har at

$$\nabla f(x,y) = 2x(y-1)\,\mathbf{i} + (x^2+y^2-2)\,\mathbf{j}.$$

For å finne de kritiske punktene ser vi på $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$, det vil si,

$$2x(y-1) = 0 \tag{1}$$
$$x^2+y^2-2 = 0. \tag{2}$$

Ligning (1) medfører $x=0$ eller $y=1$. Innsatt for $x=0$ i (2) får vi $y=\pm\sqrt{2}$. Innsatt for $y=1$ i (2) får vi $x=\pm 1$.
Altså er $(0,\pm\sqrt{2})$ og $(\pm 1, 1)$ kritiske punkter.
La $\Delta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2 = 4y(y-1) - 4x^2.$$

Da

$$\begin{aligned}
&\Delta(0,-\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}(-\sqrt{2}-1) > 0, && f_{xx}(0,-\sqrt{2}) = 2(-\sqrt{2}-1) < 0\\
&\Delta(0,\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) > 0, && f_{xx}(0,\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2}-1) > 0\\
&\Delta(\pm 1, 1) = -4 < 0,
\end{aligned}$$

så gir annenderiverttesten at $(0,-\sqrt{2})$ er et lokalt maksimum, $(0,\sqrt{2})$ et lokalt minimum og at $(\pm 1, 1)$ er sadelpunkter.

b) La $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$g(x,y) = x^2 + y^2,$$

som gir $\nabla g(x,y) = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j}$.
De nødvendige og tilstrekkelige betingelsene for minste verdi er gitt ved

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \qquad g(x,y) = 6.$$

Fra $\nabla f = \lambda \nabla g$ får vi

$$2x(y-1) = \lambda \cdot 2x \tag{3}$$
$$x^2+y^2-2 = \lambda \cdot 2y. \tag{4}$$

Innsatt for $g(x,y) = x^2+y^2 = 6$ kan vi skrive (4) som

$$4 = \lambda \cdot 2y. \tag{4'}$$

Ved å gange (3) med $y/2$ og $(4')$ med $x/2$, for deretter å trekke de fra hverandre får vi

$$x(y(y-1)-2) = x(y+1)(y-2) = 0,$$

som gir $x=0$, $y=-1$ eller $y=2$. Innsatt for $x=0$ i $g(x,y)=6$ får vi $y=\pm\sqrt{6}$. Innsatt for $y=-1$ i $g(x,y)=6$ får vi $x=\pm\sqrt{5}$. Innsatt for $y=2$ i $g(x,y)=6$ får vi $x=\pm\sqrt{2}$.
Ettersom

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{for } (x,y) = (0,\pm\sqrt{6}) \\ \frac{2}{3} & \text{for } (x,y) = (\pm\sqrt{2},2) \\ -\frac{25}{3} & \text{for } (x,y) = (\pm\sqrt{5},-1) \end{cases}$$

får vi at den minste verdien til f på sirkelen $x^2+y^2=6$ er lik $-25/3$.
Alle de kritiske punktene vi fant i **a)** ligger i området $x^2+y^2 \le 6$. Da

$$f(0,\pm\sqrt{2}) = \mp\frac{4}{3}\sqrt{2}, \qquad \text{og} \qquad f(\pm 1, 1) = -\frac{5}{3},$$

får vi at den minste verdien til f på området $x^2+y^2 \le 6$ inntreffer langs randen, nærmere bestemt i punktene $(\pm\sqrt{5}, 1)$ og har verdien $-25/3$.

5 Massen til T er fordelt symmetrisk i 1. oktant ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) for kulen $\rho \leq a$, slik at massesenteret $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ må tilfredstille $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$. Massen til T er gitt ved

$$\begin{aligned} m &= \iiint_T \mathrm{d}m = \iiint_T \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^a k\rho\cdot\rho^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{8}a^4 k\pi \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{8}a^4 k\pi. \end{aligned}$$

Ettersom

$$\begin{aligned} \iiint_T z\,\mathrm{d}m &= \iiint_T z\delta(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^a \rho\cos\varphi\cdot k\rho\cdot\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{10}a^5 k\pi\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{20}a^5 k\pi\int_0^{\pi/2}\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{20}a^5 k\pi \end{aligned}$$

får vi at

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,\mathrm{d}m = \frac{2a}{5}.$$

Altså er massesenteret til T punktet $(2a/5, 2a/5, 2a/5)$.

6 **a)** Da $\mathbf{F}$ er definert for alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (og $\mathbb{R}^3$ er enkeltsammenhengende) vet vi at $\mathbf{F}$ er konservativt hvis og bare hvis $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$. I vårt tilfelle er

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{k}.$$

Altså er $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ hvis og bare hvis $f_x = 0$, som igjen vil si at f er uavhengig av x.

b) Innsatt for den oppgitte funksjonen f får vi at

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = 2\mathbf{k}.$$

Fra oppgaveteksten har vi at $\mathbf{n}_1 = \alpha\,\mathbf{i} + \beta\,\mathbf{j} + \gamma\,\mathbf{k}$, der $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ og $\gamma \geq 0$. Altså er

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1 = 2\gamma \geq 0,$$

på S_1, der $\gamma = \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2} \leq 1$.
Ettersom $\mathbf{n}_2 = \mathbf{k}$ så er

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2 = 2$$

på S_2.
Altså er

$$0 \leq \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1 \leq \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2. \qquad (*)$$

Stokes teorem gir at

$$\iint_{S_1}\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{S_2}\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1\,\mathrm{d}\sigma \qquad (**)$$

da S_1 og S_2 har samme randkurve med samme induserte orientasjon.
(Legg merke til at $(**)$ ikke motsier $(*)$, da arealet av S_1 er større enn arealet av S_2.)