Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Eksamen TMA4105
21. mai 2010

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ **a)** Vi deriverer posisjonsvektoren m.h.p. t. Da får vi suksessivt hastigheten og akselerasjonen.

Hastigheten er

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{i} + \sqrt{2}t\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k},$$

akselerasjonen er

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \sqrt{2}\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k},$$

farten er

$$|\boldsymbol{v}| = v = \dot{s} = \sqrt{1 + 2t^2 + t^4} = 1 + t^2.$$

Vi finner buelengden ved å integrere $ds = (1 + t^2)dt$. Altså

$$S = \int_0^1 (1 + t^2)dt = \frac{4}{3}.$$

b) For å beregne krumningen finner vi først vektorproduktet

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a} = \sqrt{2}t^2\boldsymbol{i} - 2t\boldsymbol{j} + \sqrt{2}\boldsymbol{k},$$

og vi finner

$$\kappa = \frac{\sqrt{2}}{(1 + t^2)^2}.$$

Vi har $\dot{\boldsymbol{a}} = \dddot{\boldsymbol{r}}(t) = 2\boldsymbol{k}$, så trippelvektorproduktet blir

$$(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}) \cdot \dot{\boldsymbol{a}} = 2\sqrt{2},$$

og torsjonen

$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{(1 + t^2)^2}.$$

2 De to flaten kan beskrives som nivåflater til funksjonene

$$f_1(x,y,z) = x^2 + 4y^2 - z,$$
$$f_2(x,y,z) = 2x - 8y - z - 1.$$

I ethvert punkt på skjæringskurven vil vektoren $\mathrm{grad} f_1 \times \mathrm{grad} f_2$ være en tangentvektor.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{grad} f_1 = 2x\boldsymbol{i} + 8y\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, \\
&\mathrm{grad} f_2 = 2\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, \\
&\mathrm{grad} f_1 \times \mathrm{grad} f_2 = -8(y+1)\boldsymbol{i} + 2(x-1)\boldsymbol{j} - 16(x+y)\boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

I punktet $(3,-1,13)$ blir denne tangentvektoren

$$4\boldsymbol{j} - 32\boldsymbol{k},$$

og enhetsvektoren med positiv $\boldsymbol{k}$-komponent er

$$\frac{-\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}}{\sqrt{65}}.$$

3 Vi bruker metoden med Lagrangemultiplikatorer for å finne minimumsverdien til funksjonen $f(x,y,z) = 2x^2+y^2+3z^2$ gitt bibetingelsen $g(x,y,z) = 2x+3y+4z = 49$. Vi får fire ligninger,

$$\boldsymbol{\nabla} f = \lambda \boldsymbol{\nabla} g, \qquad g(x,y,z) = 49,$$

eller

$$\begin{aligned}
4x &= \lambda\, 2, \\
2y &= \lambda\, 3, \qquad\qquad 2x + 3y + 4z = 49, \\
6z &= \lambda\, 4,
\end{aligned}$$

innsatt i g blir dette

$$2\left(\frac{1}{2}\lambda\right) + 3\left(\frac{3}{2}\lambda\right) + 4\left(\frac{2}{3}\lambda\right) = 49,$$

altså

$$\lambda = 6 \qquad \text{og} \qquad (x,y,z) = (3,9,4).$$

Verdien er

$$f(3,9,4) = 147.$$

Det er opplagt at dette er et minimum, siden funksjonen vokser når vi fjerner oss fra origo. Vi kan også se eksplisitt at det er et minimum ved å parametrisere flaten f. eks. ved ved $x = u + 3$, $y = 9 + v$ og $z = 4 - \frac{1}{2}u - \frac{3}{4}v$. Innsatt i f får vi da $f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = 147 + 2u^2 + v^2 + (\frac{1}{2}u + \frac{3}{4}v)^2$, og dette viser 147 er minimumsverdien.

$\boxed{4}$ **a)** Vi finner de kritiske punktene ved å sette $\nabla f = 0$, hvilket gir oss,

$$3x^2 - 3y = 0$$
$$3y^2 - 3x = 0$$

Substitusjon gir $x^2 = y$ og $x^4 = x$. Mulige løsninger er $(x, y) = (0, 0)$ og $(x, y) = (1, 1)$. Diskriminanten er $36xy - 9$, og dette viser at punktet $(0, 0)$ er et sadelpunkt og punktet $(1, 1)$ er et lokalt minimum. ($f_{xx}(1, 1) = 6 > 0$.)

b) Gradienten til funksjonen $g(x, y, z) = z - f(x, y)$ er $\nabla g = (-3x^2 + 3y)\boldsymbol{i} + (-3y^2 + 3x)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. I punktet $(2, 2, 4)$ er gradienten $-6\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Følgelig er tangentplanet gitt ved ligningen $-6(x-2) - 6(y-2) + z - 4 = 0$, som også kan skrives som $6x + 6y - z = 20$.

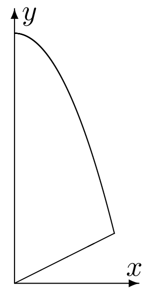
$\boxed{5}$ Integrasjonsområdet er en sirkelskive i xy-planet med radius $\sqrt{\pi}$. Vi innfører polarkoordinater,

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$
$$dA = dx\,dy = r\,dr\,d\theta.$$

Da får vi

$$\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{\pi-y^2}}^{\sqrt{\pi-y^2}} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(r^2)\,r dr\,d\theta$$
$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(r^2)\,r dr = \pi \int_0^{\pi} \sin(u)\,du = 2\pi.$$

$\boxed{6}$



Vi har

$$\int_0^1 \left(\int_0^{2y} x\,dx \right) dy + \int_1^5 \left(\int_0^{\sqrt{5-y}} x\,dx \right) dy$$
$$= \int_0^2 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{5-x^2} x\,dy \right) dx = \int_0^2 x(5 - x^2 - \frac{x}{2})\,dx = \frac{14}{3}.$$

$\boxed{7}$ Vi regner først ut volumet til T, div$\boldsymbol{F}$ og curl$\boldsymbol{F}$. Arealet av grunnflaten er 1, og høyden er 3, så volumet er 1. Regning viser at div$\boldsymbol{F} = 3$ og curl$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$.

a) Vektorfeltet $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ strømmer direkte bort fra origo, så ingenting strømmer gjennom koordinatplanene. Det vil si at alt som strømmer ut gjennom overflaten til T strømmer ut gjennom S. I følge divergensteoremet har vi

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \iint_{\partial T} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \iiint_T \text{div}\boldsymbol{F}\,dV = 3(\text{Volumet til } T) = 3.$$

b) I følge Stokes teorem er $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S \text{curl}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = 0.$

.