Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Lisa Lorentzen tlf. 73 59 35 48
Harald Hanche-Olsen tlf. 73 59 35 25
Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68

EKSAMEN I SIF5005 MATEMATIKK 2

Bokmål
Mandag 13. mai 2002
Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 19. juni 2002

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

La L_1 og L_2 være to linjer i rommet gitt ved

$$\begin{aligned} L_1\colon &\quad x = u+1, \quad y = 2u-1, \quad z = 2u+2, \qquad -\infty < u < \infty; \\ L_2\colon &\quad x = v+2, \quad y = 3v-2, \quad z = 2v+4, \qquad -\infty < v < \infty. \end{aligned}$$

Vis at L_1 og L_2 skjærer hverandre. Finn en ligning for planet som inneholder både L_1 og L_2.

Oppgave 2

La f være funksjonen gitt ved $f(x,y,z) = xyz$, og la $\mathbf{v}$ være en vektor som står vinkelrett både på $\mathbf{a} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ og $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, og som har positiv $\mathbf{k}$-komponent. Finn den retningsderiverte av f i punktet $P_0(1,-1,2)$ i retningen til vektoren $\mathbf{v}$.

Oppgave 3
Temperaturen i en metallplate i xy-planet varierer fra punkt til punkt og er gitt ved $T = f(x, y)$, der

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x.$$

Finn det varmeste punktet (eventuelt de varmeste punktene) på ellipsen

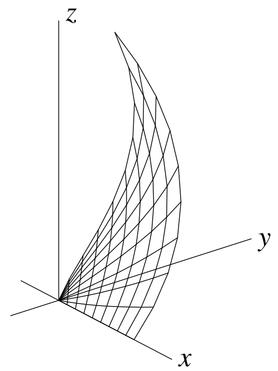
$$\frac{x^2}{2^2} + y^2 = 1.$$

Oppgave 4
En flate S (se figuren til høyre) har parameterfremstilling

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v)\mathbf{i} + (u \sin v)\mathbf{j} + v\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D$$

der D er trekanten i uv-planet med hjørner i $(0, 0)$, $(1, 0)$ og $(1, 2)$.

Finn arealet av S.



Oppgave 5
La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \langle\, \sin xy + xy \cos xy, x^2 \cos xy \,\rangle.$$

Er vektorfeltet $\mathbf{F}$ konservativt? Bestem verdien av linjeintegralet $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, der C er kurven gitt ved

$$x = \cos t, \quad y = e^t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Oppgave 6
La S være overflaten til det romlige området T som er begrenset av flatene

$$z = 9 - x^2 - y^2, \quad z \ge 0 \qquad \text{og} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad z \le 0.$$

La funksjonen f være gitt ved $f(x, y, z) = 2x + y + 2z^3$, og la vektorfeltet $\mathbf{F}$ være gradientfeltet til f, det vil si $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$.

Finn fluksen

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

av $\mathbf{F}$ gjennom S i retning av ytre enhetsnormal $\mathbf{n}$.

Oppgave 7
La a være et positivt tall, og la R_a være sirkelskiven med senter i $(0, a)$ og radius a.

a) Vis, for eksempel ved å bruke polarkoordinater, at

$$\iint_{R_a} (x^2 + y^2)\, dA = \tfrac{3}{2}\pi a^4.$$

(Oppgitt formel: $\int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x\, dx$.)

b) Finn verdien av linjeintegralet

$$\oint_C (e^x - y^3)\, dx + (x^3 - e^y)\, dy$$

der C er sirkelen med senter i $(0, 1)$ og radius 1, orientert mot urviseren.

c) La S være flaten med ligning $x^2 + y^2 - 2yz = 0$, $0 \leq z \leq 1$. Skisser S ved bl.a. å finne skjæringskurvene mellom S og plan parallelle med xy-planet. Beregn trippelintegralet

$$\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2)\, dV$$

der T er begrenset av S og planet $z = 1$.

Oppgave 8
Ligningen

$$t \ln u + x^2 + \tfrac{1}{2} t \ln(\pi t) = 0 \qquad \text{der } 0 < t < 2x^2$$

definerer t implisitt som en funksjon av x og u. For $x = 1$ og $t = 1$ er $u = 1/(e\sqrt{\pi}) \approx 0{,}208$. Bestem de partiellderiverte $\partial t/\partial x$ og $\partial t/\partial u$ for $(x, u) = (1, 1/(e\sqrt{\pi}))$, og finn en tilnærmet verdi for t når $x = 1{,}1$ og $u = 0{,}2$.

FORMELLISTE

Annenderiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx},\ \ B = f_{xy},\ \ C = f_{yy}$$

Koordinatsystemer:

Sylinderkoordinater $x = r\,\cos\theta,\quad y = r\,\sin\theta,\quad z = z,$
$r^2 = x^2 + y^2,\quad dV = r\,dz\,dr\,d\theta$

Kulekoordinater $x = \rho\,\sin\varphi\,\cos\theta,\quad y = \rho\,\sin\varphi\,\sin\theta,\quad z = \rho\,\cos\varphi,$
$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,\quad dV = \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$

Flateintegral:

$$dS = |\mathbf{N}(u,v)|du\,dv = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv$$

Tyngdepunkt for romlige legemer:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iiint\limits_T x\,dm,\quad \overline{y} = \frac{1}{m}\iiint\limits_T y\,dm,\quad \overline{z} = \frac{1}{m}\iiint\limits_T z\,dm,\qquad dm = \delta\,dV$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_R \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dA$$

Divergensteoremet: $$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint\limits_T \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iiint\limits_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$$

Stokes' teorem: $$\oint\limits_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint\limits_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint\limits_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$$

$$\text{der } \nabla = \Big\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \Big\rangle$$